DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada

Razonamiento aproximado

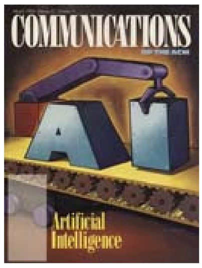
© Fernando Berzal, berzal@acm.org

Razonamiento aproximado

- Proposiciones condicionales
- Modus ponens generalizado
- Sistemas basados en reglas difusas
- Inferencia en sistemas basados en reglas difusas

Razonamiento aproximado

"In traditional-hard-computing, the prime desiderata are precision, certainty, and rigor. By contrast, the point of departure in **soft computing** is the thesis that precision and certainty carry a cost and that computation, reasoning, and decision making should exploit –wherever possible – the tolerance for imprecision and uncertainty."



"… **fuzzy logic** provides a model for modes of reasoning that are approximate rather than exact. The role model for fuzzy logic is the human mind."

Lofti A. Zadeh (1994): "Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing". Communications of the ACM, 37(3):77-84

Razonamiento aproximado

OBJETIVO:

Inferir conclusiones sobre
una serie de proposiciones de naturaleza vaga.

Las proposiciones…

- … son meros enunciados acerca de un hecho.
- … las representaremos mediante conjuntos difusos.

Proposiciones condicionales

Nos permitirán formular "reglas difusas".

ESTRUCTRURA

Si A entonces B

- A: Antecedente
- B: Consecuente

Tanto A como B pueden ser proposiciones cualesquiera (en los ejemplos, usaremos subconjuntos difusos en espacios unidimensionales X e Y).

Proposiciones condicionales

Una proposición condicional induce una relación difusa R en X×Y, a partir de la cual se pueden hacer inferencias.

Dos formas de interpretar la proposiciones condicionales que dan lugar a dos formas diferentes de relación R:

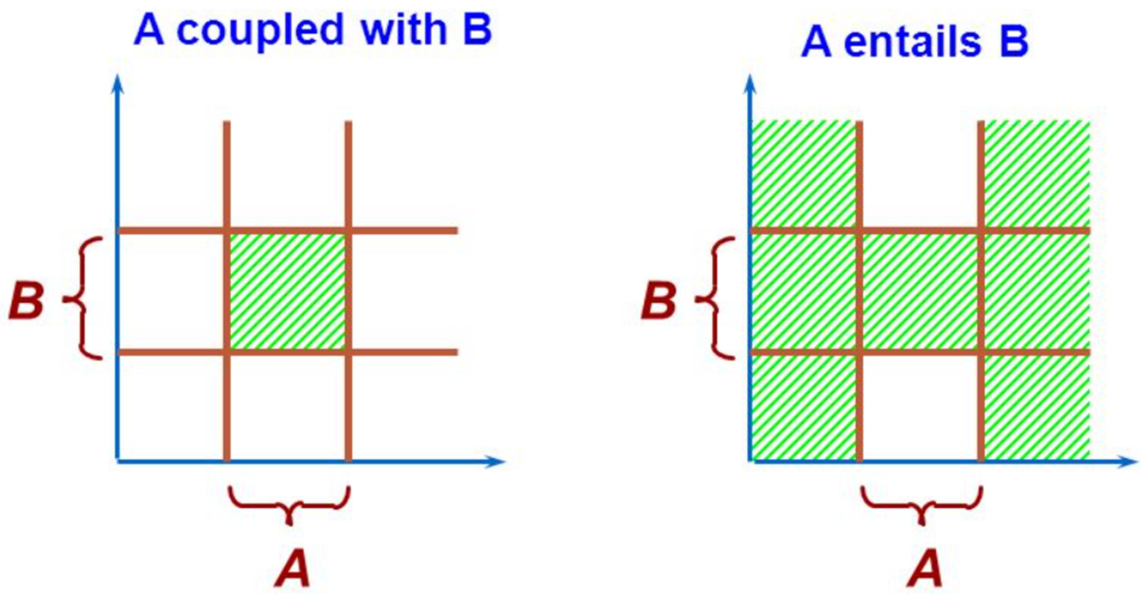
{Si x es A entonces y es B}
≡ {A se empareja con B}

o bien

{Si x es A entonces y es B}
≡ {A implica (supone) B}

Proposiciones condicionales

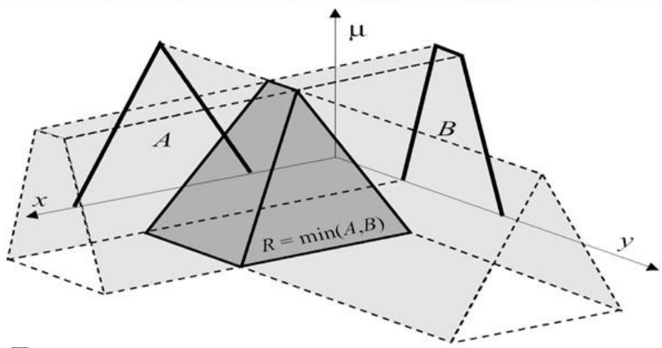
Two ways to interpret "If x is A then y is B":



Proposiciones condicionales

PRIMERA INTERPRETACIÓN

{Si x es A entonces y es B}
≡ {A se empareja con B}



- Equivale a la expresión $A \cap B$.
- $R(x,y) = t(A(x), B(y))$ donde t es una t-norma, por ejemplo

$$R(x,y) = \min\{A(x), B(y)\}$$

Proposiciones condicionales

SEGUNDA INTERPRETACIÓN

{Si x es A entonces y es B}
≡ {A implica (supone) B}

- Extensión natural de la implicación en lógica clásica.

- $R(x, y) = s(N(A(x)), B(y))$ donde N es una negación y s es una t-conorma, por ejemplo

$$R(x, y) = \max\{1 - A(x), B(y)\}$$

Proposiciones condicionales

La interpretación **{A se empareja con B}**
fue introducida por Mamdani en 1975
y es la más empleada:

- Fácil de implementar.

- Intuitivamente correcta.

- Proporciona prácticamente los mismos resultados que la otra interpretación.

Modus ponens generalizado

Supongamos que partimos de

- Una **regla:** si x es A entonces y es B.
- Una **observación** (**hecho**): es A′

donde A y A′ son subconjuntos difusos de X
y B un subconjunto difuso de Y.

Queremos obtener una **conclusión** B′
en forma de subconjunto difuso de Y.

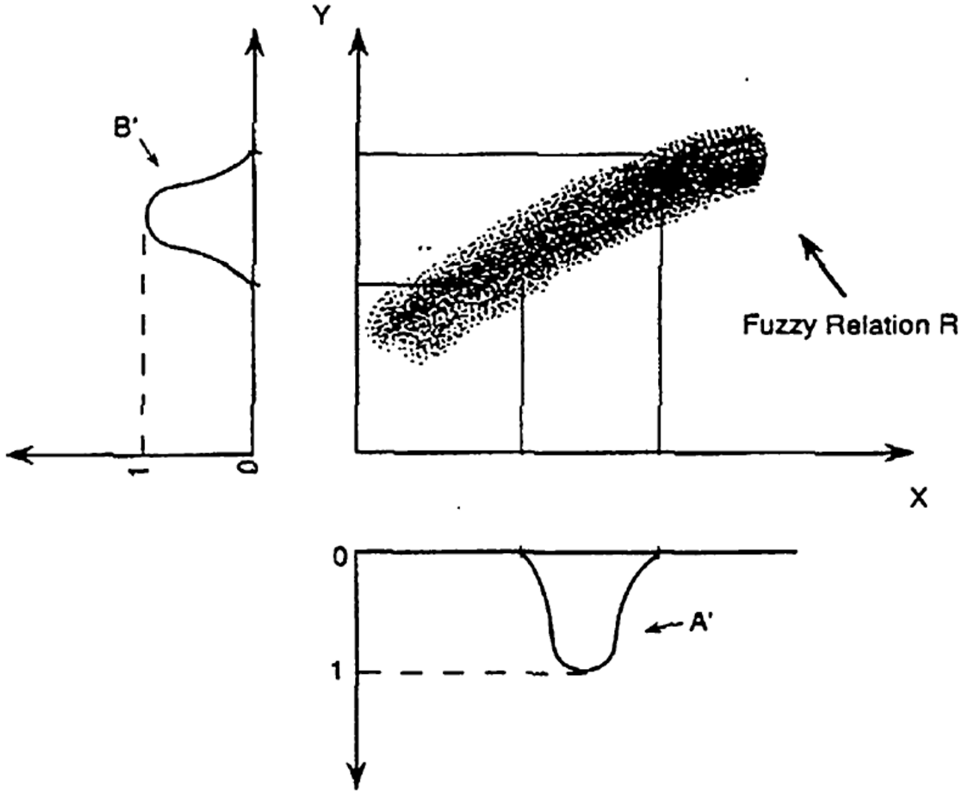
Modus ponens generalizado

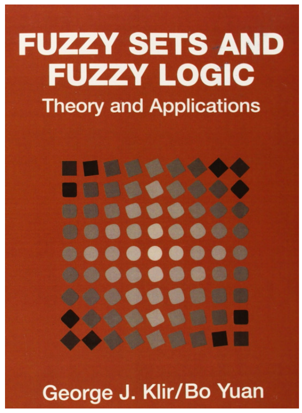
MODUS PONENS GENERALIZADO

Hecho	**x es A′**	A′(x)
Regla	**Si x es A entonces y es B**	R(x,y)
Conclusión	**y es B′**	B′(y)

$$\mathbf{B'(y) = A'(x) \circ R(x,y)}$$

Modus ponens generalizado





Modus ponens generalizado

La regla genera una relación difusa R en X×Y, que compuesta con A′ nos permite obtener B′ (regla de inferencia composicional [Zadeh 1973]):

$$B'(y) = A'(x) \circ R(x,y) = PRY(R \cap EC(A'))$$

que podemos calcular como…

$$B'(y) = \max_{x} \min_{x,y}\{R(x,y), A'(x)\}$$

Sistemas basados en reglas difusas

Usan proposiciones condicionales de la forma

"si x es A entonces y es B"

donde

x e y son variables lingüísticas

A y B son etiquetas de esas variables lingüísticas

EJEMPLOS

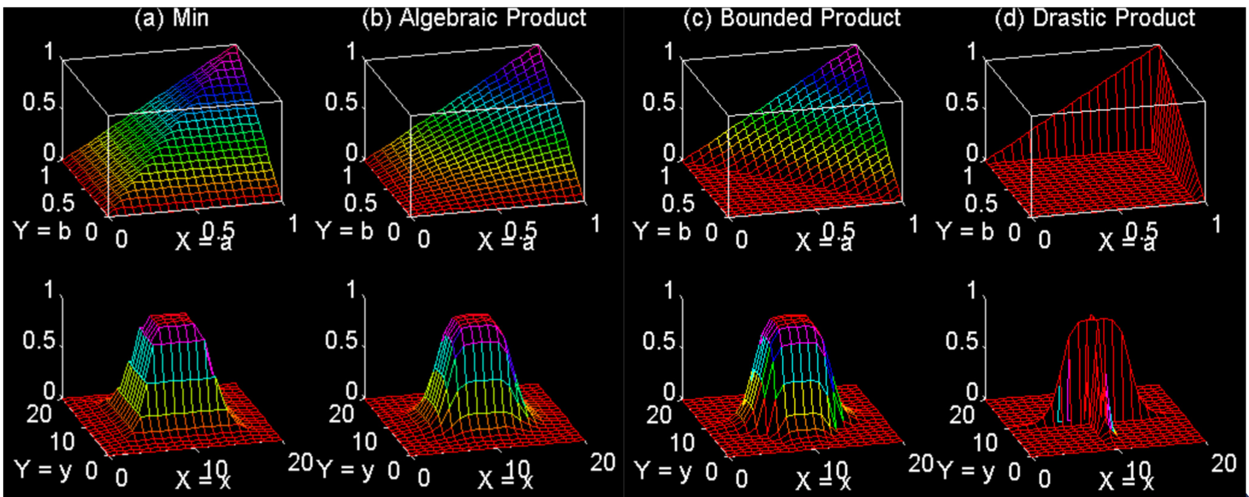
Si la presión es alta
entonces el volumen es pequeño.

Si la velocidad es alta
entonces aplicar una fuerza moderada al freno

Sistemas basados en reglas difusas

PRIMERA INTERPRETACIÓN

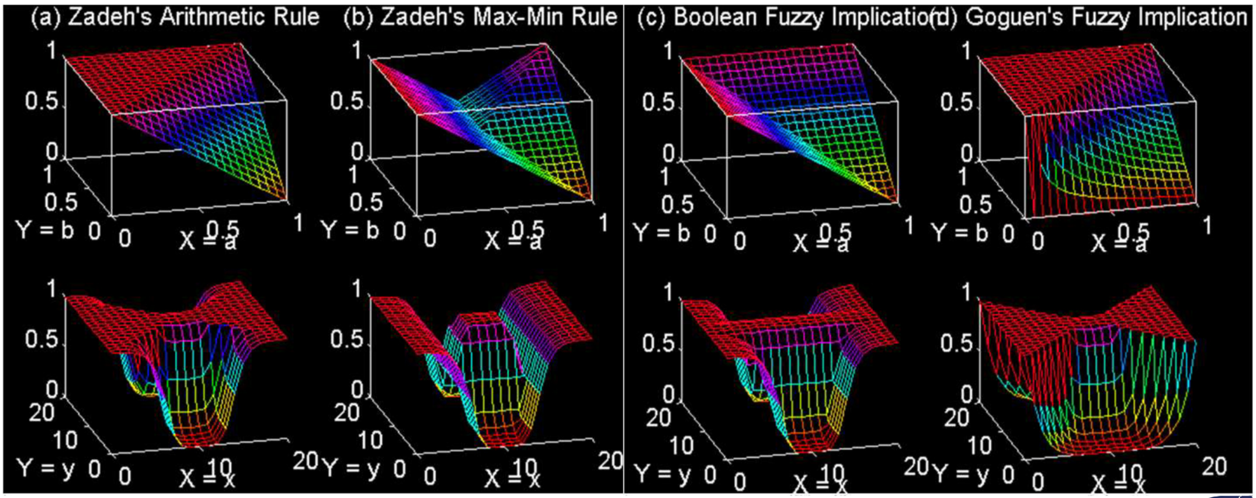
{Si x es A entonces y es B}
≡ {A se empareja con B}



Sistemas basados en reglas difusas

SEGUNDA INTERPRETACIÓN

{Si x es A entonces y es B}
≡ {A implica B}



Sistemas basados en reglas difusas

El modus ponens generalizado:

x es A'
<u>Si x es A entonces y es B</u>
y es B'

$$B'(y) = A'(x) \circ R(x,y) = PRY(R \cap EC(A'))$$

Con la interpretación de Mamdani queda como…

$$B'(y) = \max_{x} \min_{x,y} \{\min\{A(x), B(y)\}, A'(x)\}$$

Sistemas basados en reglas difusas

Interpretación de Mamdani

$$B'(y) = \max_{x}\left\{\min_{x,y}\{\min\{A(x), B(y)\}, A'(x)\}\right\}$$

Que podemos reescribir como…

$$B'(y) = \max_{x}\left\{\min_{x,y}\{\min\{A(x), A'(x)\}, B(y)\}\right\}$$

El máximo en x del mínimo en x,y
es el mínimo en x,y del máximo en x:

$$B'(y) = \min_{x,y}\left\{\max_{x}\{\min\{A(x), A'(x)\}, B(y)\}\right\}$$

Sistemas basados en reglas difusas

Interpretación de Mamdani

$$B'(y) = \min_{x,y}\left\{\max_{x}\{\min\{A(x), A'(x)\}\}, B(y)\right\}$$

$$\beta(x) = \max_{x}\{\min\{A(x), A'(x)\}\}$$

$\beta(x)$ depende sólo del antecedente de la regla:

$$B'(y) = \min_{x,y}\{\beta(x), B(y)\}$$

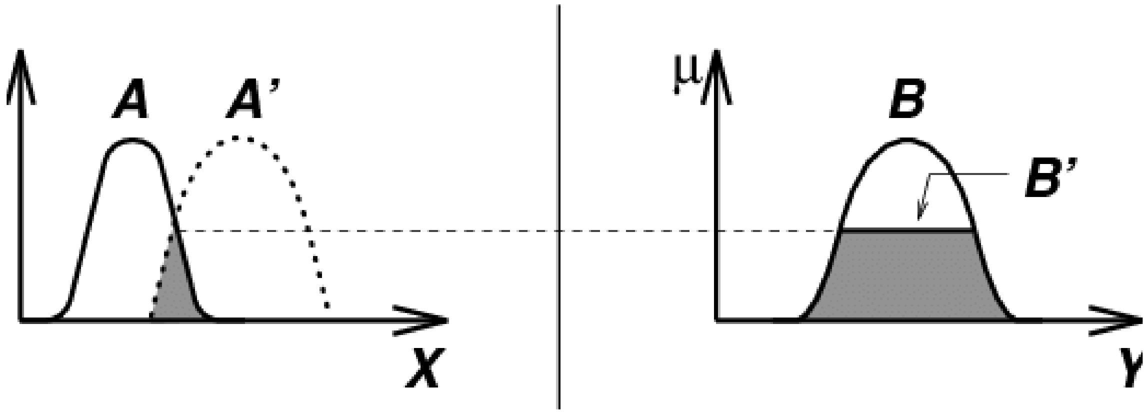
$\beta(x)$ representa
el grado de cumplimiento del antecedente de la regla.

Sistemas basados en reglas difusas

Interpretación de Mamdani

Reglas con un antecedente

Si x es A entonces y es B

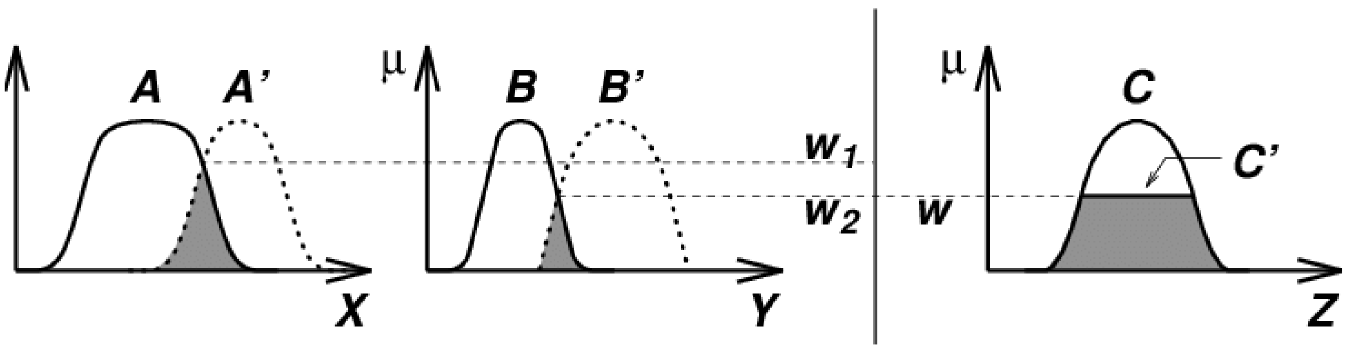


Sistemas basados en reglas difusas

Interpretación de Mamdani

Reglas con varios antecedentes

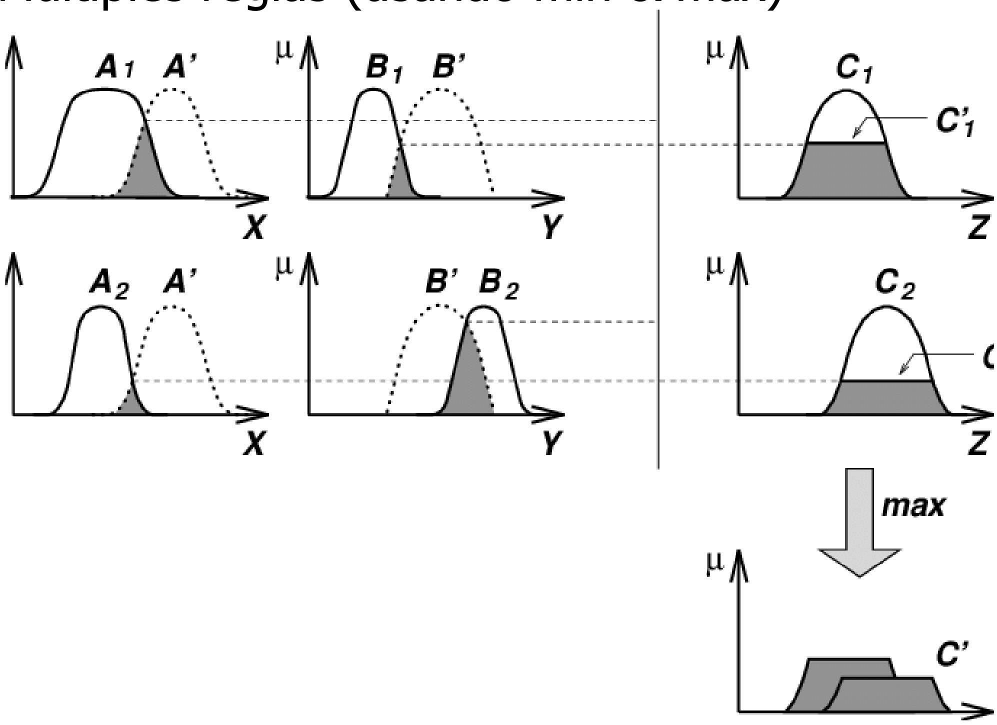
Si x es A e y es B entonces z es C



Sistemas basados en reglas difusas

Interpretación de Mamdani

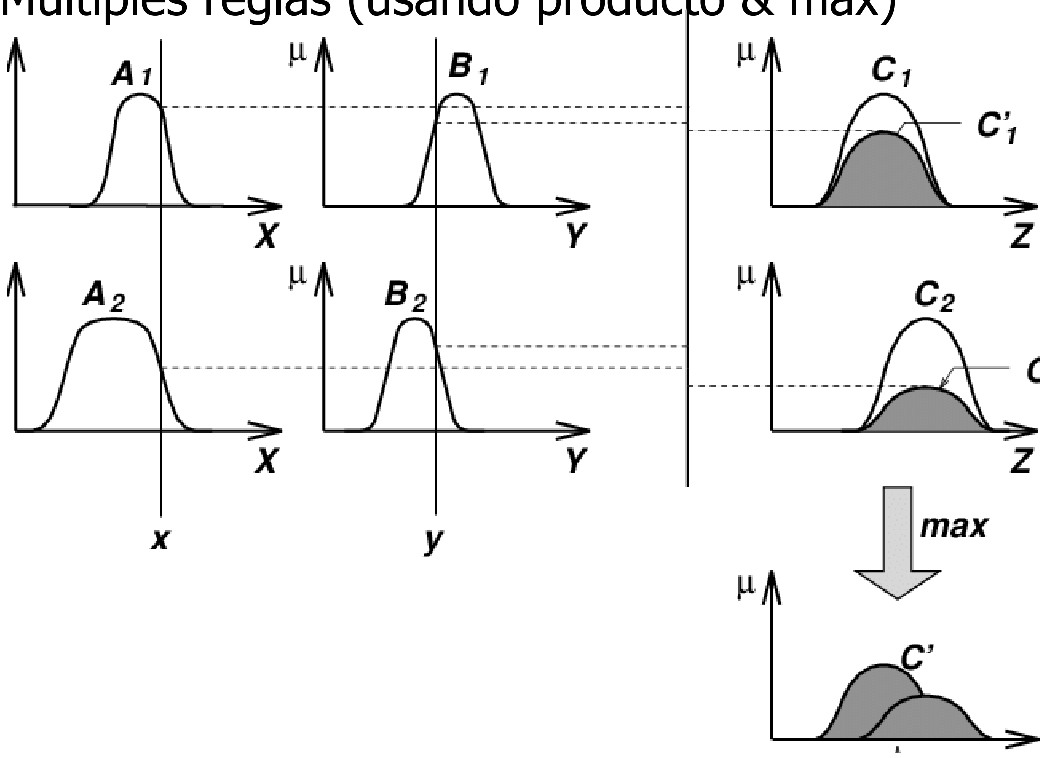
Múltiples reglas (usando min & max)



Sistemas basados en reglas difusas

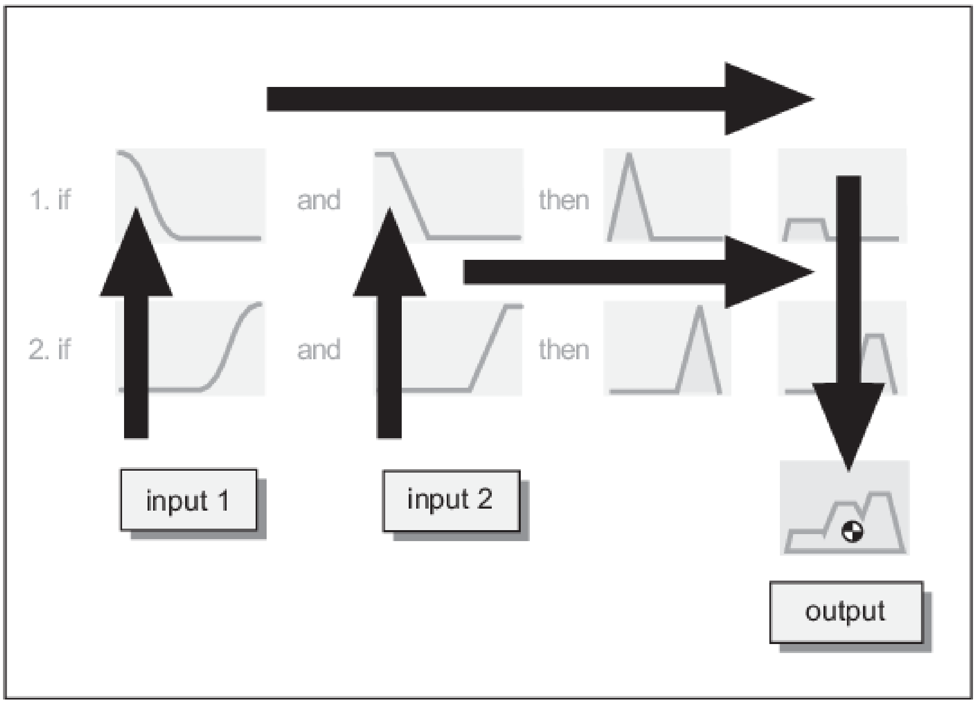
Interpretación de Mamdani

Múltiples reglas (usando producto & max)



Sistemas basados en reglas difusas

Sistema de inferencia difuso

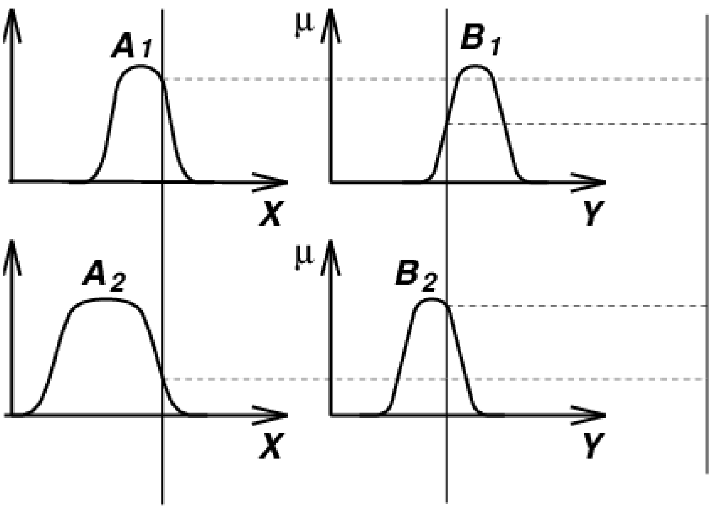


Sistemas basados en reglas difusas

Sistema de inferencia difuso

Entrada "crisp": Singleton

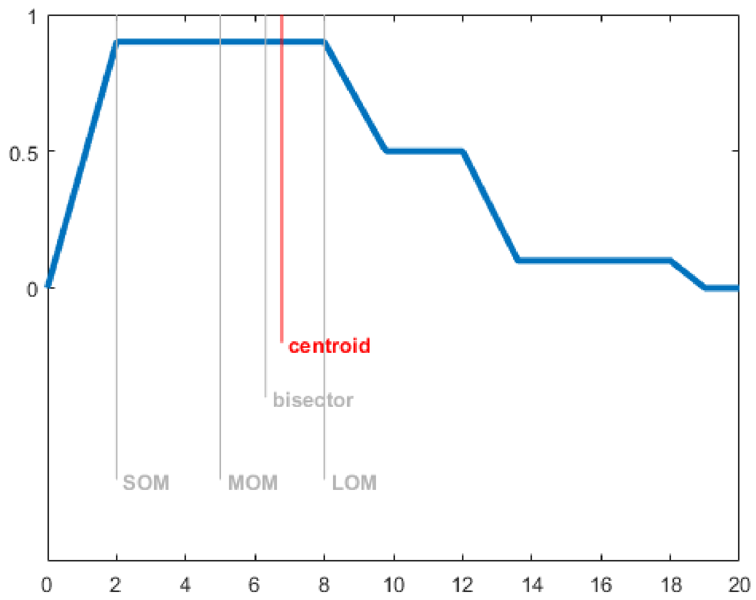
(el hecho a partir del cual se infiere es un valor concreto
de la variable del antecedente, que puede verse como
un conjunto difuso "singleton": 1 para el valor, 0 para el resto)



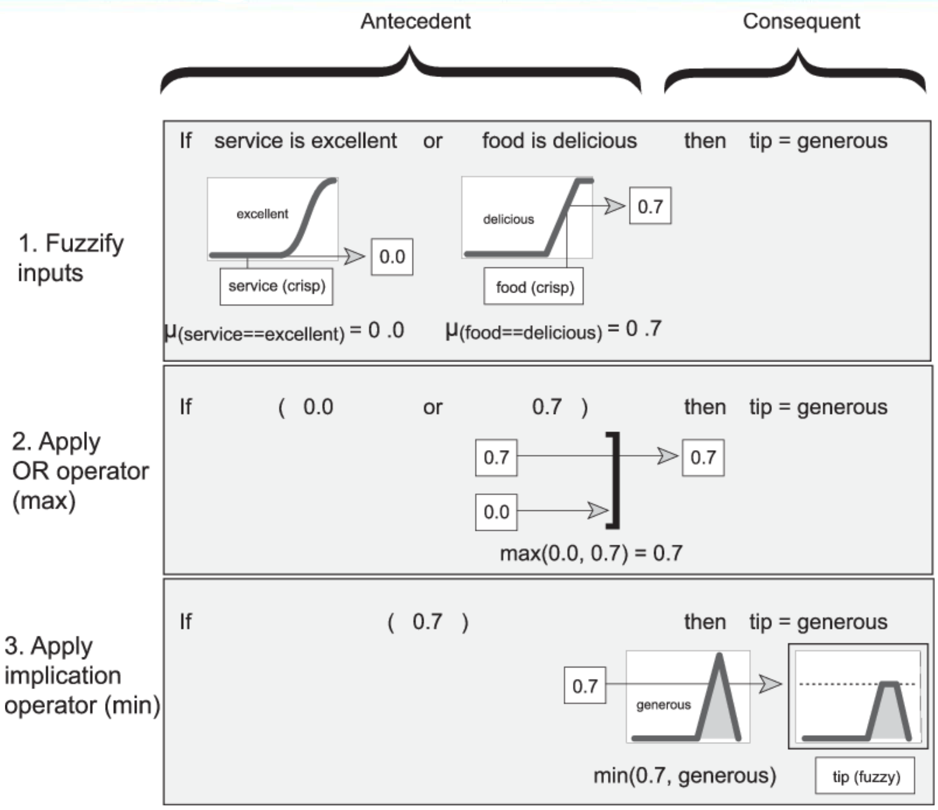
Sistemas basados en reglas difusas

Sistema de inferencia difuso

Salida "crisp": métodos de "defuzzification"



Sistemas basados en reglas difusas



https://es.mathworks.com/help/fuzzy/foundations-of-fuzzy-logic.html

Bibliografía

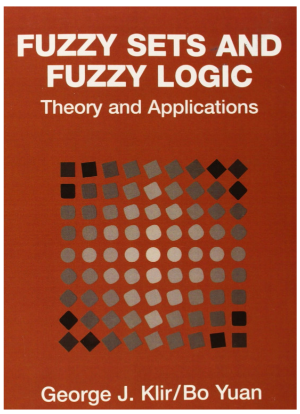
Miguel Delgado:
Apuntes de Inteligencia Computacional
Universidad de Granada, hasta el curso 2021/2022

Sesiones grabadas en vídeo, curso 2020/2021:
https://elvex.ugr.es/decsai/computational-intelligence/video/fuzzy/

Bibliografía recomendada

Lógica Difusa

- Hans-Jürgen Zimmermann:
  Fuzzy Set Theory,
  WIREs Computational Statistics,
  John Wiley & Sons, 2:3, May/June 2010.
  DOI 10.1002/wics.82

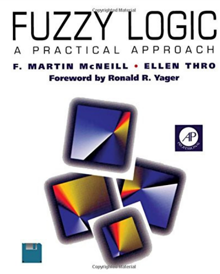


- George J. Klir & Bo Yuan:
  Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications,
  1st edition, Prentice Hall, 1995.
  ISBN 0131011715

Bibliografía complementaria

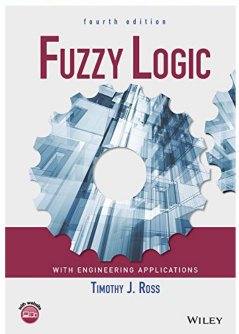
Lógica y Sistemas Difusos

- Rudolf Kruse, Joan E. Gebhardt & Frank Klawonn:
  Foundations of Fuzzy Systems.
  John Wiley & Sons, 1994. ISBN 047194243X.
- Witold Pedrycz & Fernando Gomide:
  An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design.
  MIT Press, 1998. ISBN 0262161710.
- Hans-Jürgen Zimmermann:
  Fuzzy Set Theory and Its Applications,
  Springer, 3rd edition, 1996. ISBN 0792396243
  Springer, 4th edition, 2001. ISBN 9401038708.
- F. Martin McNeill & Ellen Thro:
  Fuzzy Logic: A Practical Approach.
  Morgan Kaufmann, 1994. ISBN 0124859658.



Bibliografía complementaria

Lógica y Sistemas Difusos

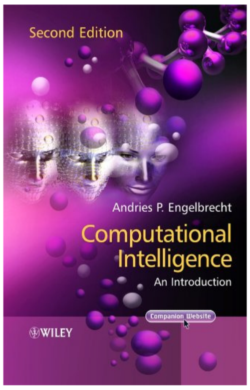


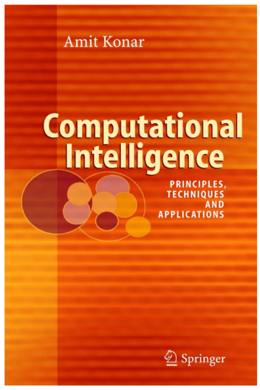
- Timothy J. Ross:
  Fuzzy Logic with Engineering Applications,
  4th edition, John Wiley & Sons, 2017. ISBN 1119235863.
- Lofti A. Zadeh: **Fuzzy Sets**.
  Information and Control, volume 8, issue 3, pp. 338-353,
  June 1965. DOI 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
- James C. Bezdek: **Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms**. Plenum Press, 1981. ISBN 0306406713.
- Bart Kosko: **Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence**. Prentice Hall, 1992. ISBN 0136114350
- Mohammad Jamshidi, Nader Vadiee & Timothy Ross (editors): **Fuzzy Logic and Control. Software and Hardware Applications**. Prentice Hall, 1993. ISBN 0133342514.

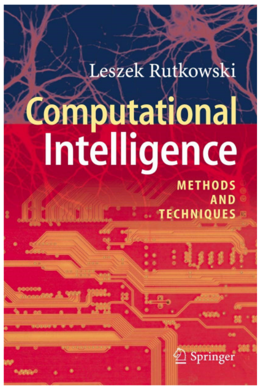
Bibliografía complementaria

Inteligencia Computacional

- Andries P. Engelbrecht:
  Computational Intelligence.
  An Introduction,
  2nd edition, John Wiley, 2007.
  ISBN 0470035617.
- Amit Konar:
  Computational Intelligence.
  Principles, Techniques and Applications,
  Springer Verlag, 2005.
  ISBN 3540208984.
- Leszek Rutkowski:
  Computational Intelligence.
  Methods and Techniques,
  Springer Verlag, 2008.
  ISBN 3540762876.







Bibliografía complementaria

Inteligencia Computacional

- James M. Keller, Derong Liu & David B. Fogel:
  Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation,
  Wiley - IEEE Press, 2016. ISBN 1119214343
- Rudolf Kruse, Christian Borgelt, Christian Braune, Sanaz Mostaghim, Matthias Steinbrecher, Frank Klawonn & Christian Moewes: **Computational Intelligence: A Methodological Introduction**. Springer, 2nd edition, 2016. ISBN 1447172949